

Correction du DST n°5

21/02/26

Exercice 1

1. Pour tout $x \neq 0$, $\frac{e^x - x - 1}{x} = \frac{e^x - 1}{x} - 1$.

Or $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$. On reconnaît le taux d'accroissement entre 0 et x de la fonction $\exp$. Comme $\exp$ est dérivable en 0 on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$.

On en déduit par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = 1 - 1 = 0$.

2. La fonction $x \mapsto e^x - x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues.

La fonction $x \mapsto \frac{e^x - x - 1}{x}$ est donc continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues, dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles. Ainsi la restriction de g à chacun de ces intervalles est continue.

Enfin, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 1 = g(0)$ donc g est continue en 0.

g est continue sur $] -\infty; 0[$, sur $]0; +\infty[$, et continue en 0 donc elle est continue sur $\mathbb{R}$

3. Comme $x = o(e^x)$ et $1 = e^x$ donc on a $e^x - x - 1 \sim_{x \rightarrow +\infty} e^x$, donc $g(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ par croissance comparée.

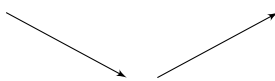
En $-\infty$, on a $e^x = x$ et $1 = x$ donc $e^x - x - 1 \sim_{x \rightarrow -\infty} -x$ et donc $g(x) \sim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} \sim_{x \rightarrow -\infty} -1$. On en déduit que

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$

4. (a) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = e^x + x e^x - e^x = x e^x$$

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , $h'(x)$ est du signe de x pour tout réel x d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
h			

- (b) D'après le tableau de variation précédent, h atteint son minimum en 0 et ce minimum vaut $h(0) = 0$. Par ailleurs, elle est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc strictement positive sur ces intervalles., donc : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$

5. (a) $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - x - 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur $] -\infty; 0[$ comme quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles et dont le dénominateur ne s'annule pas.

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{(e^x - 1)x - (e^x - x - 1)}{x^2} \\
 &= \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} \\
 &= \frac{h(x)}{x^2}
 \end{aligned}$$

donc $g'(x)$ est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. g est donc strictement croissante sur $] - \infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, et comme elle est continue en 0 on peut en déduire qu'elle est strictement croissante sur $] - \infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
 g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6. g est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1 et strictement croissante d'après la question 5.b. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ donc $1 \in] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou d'après le théorème de la bijection), l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Comme $0 + 0 - 0 + 0 = 0$ et $0 - 0 - 0 = 0$, le vecteur nul $(0, 0, 0, 0)$ est dans F donc F est non vide.

Soient $u = (x, y, z, t)$ et $v = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de F et soient λ et μ deux réels. On a :

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t') \in \mathbb{R}^4$$

et on a ensuite

$$\begin{aligned} (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') + (\lambda t + \mu t') &= \lambda \underbrace{(x + y - z + t)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \mu \underbrace{(x' + y' - z' + t')}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') &= \lambda \underbrace{(x - y - z)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \mu \underbrace{(x' - y' - z')}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F.$$

$$F \text{ est non vide et stable par combinaison linéaire donc c'est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4.$$

2. Soit $u \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F \iff \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} u = (x, y, z, t) \\ x + y - z + t = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} u = (x, y, z, t) \\ x + y - z + t = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} u = (x, y, z, t) \\ x = z - t \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists (z, t) \in \mathbb{R}^2, u = (z - t, 0, z, t)$$

$$\iff \exists (z, t) \in \mathbb{R}^2, u = z \cdot (1, 0, 1, 0) + t \cdot (-1, 0, 0, 1)$$

$$\iff u \in \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$$

donc F est engendré par la famille $((1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$. De plus ces deux vecteurs sont non colinéaires donc forment une famille libre, c'est donc une base de F . On a donc bien $\dim(F) = 2$.

3. Soit $u \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned}
u \in H &\iff \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} u = (x, y, z, t) \\ x = z \end{cases} \\
&\iff \exists (y, z, t) \in \mathbb{R}^3, u = (z, y, z, t) \\
&\iff \exists (y, z, t) \in \mathbb{R}^3, u = z \cdot (1, 0, 1, 0) + y \cdot (0, 1, 0, 0) + t \cdot (0, 0, 0, 1) \\
&\iff u \in \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))
\end{aligned}$$

donc la famille $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ est une famille génératrice de H . Montrons qu'elle est libre : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 \cdot (1, 0, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 1, 0, 0) + \lambda_3 \cdot (0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

alors

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la famille est bien libre.

C'est donc finalement une base de H et on a bien $\dim(H) = 3$.

4. Soit $u \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned}
u \in F \cap H &\iff \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} u = (x, y, z, t) \\ x + y - z + t = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x = z \end{cases} \\
&\iff \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} u = (x, y, z, t) \\ t = 0 \\ y = 0 \\ x = z \end{cases} \\
&\iff \exists z \in \mathbb{R}, u = (z, 0, 0, z) \\
&u \in \text{Vect}((1, 0, 0, 1))
\end{aligned}$$

donc $F \cap H$ est la droite vectorielle $\text{Vect}((1, 0, 0, 1))$.

5. Notons $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $u_3 = (0, 0, 0, 1)$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}_H$ trouvée à la question 3. Montrons que (u_1, u_2, u_3, u) est une famille libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des réels tels que

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 + \lambda_4 \cdot u = (0, 0, 0, 0)$$

alors

$$(\lambda_1 \cdot (1, 0, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 1, 0, 0) + \lambda_3 \cdot (0, 0, 0, 1) + \lambda_4 \cdot (1, 0, -1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

c'est à dire :

$$(\lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_4, \lambda_3) = (0, 0, 0, 0)$$

d'où

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne immédiatement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ (en faisant $L_1 + L_3$ et $L_1 - L_3$ par exemple),

donc la famille (u_1, u_2, u_3, u) est bien libre.

6. D'après la question précédente, $\mathcal{B}_H \cup \{u\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ contenant 4 vecteurs. Or d'après le cours $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ donc cette famille est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3

1. Comme $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un polynôme en n de terme dominant n^4 , on a $n(n+1)(n+2)(n+3) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^4$ donc :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$$

et ces deux suites sont positives. Or la série de terme général $\frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann qui converge car $4 > 1$, donc d'après le théorème de comparaison pour les séries positives, la série $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ est de même nature, c'est à dire convergente.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \quad \boxed{= \frac{n}{n+4}}$$

3. On remarque que pour tout $n \geq 1$, $v_n = (n+4)u_{n+1} = nu_n$ grâce à l'égalité de la question 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on a donc :

$$\begin{aligned} v_{n-1} - v_n &= (n+3)u_n - (n+4)u_{n+1} \\ &= (n+3)u_n - nu_n \\ &\boxed{= 3u_n} \end{aligned}$$

4. On en déduit, pour tout entier naturel N non nul, que :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N u_n \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N 3u_n \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N (v_{n-1} - v_n) \\ &\boxed{= \frac{1}{3}(v_0 - v_N)} \end{aligned} \quad \text{par somme télescopique}$$

5. Comme $v_N = (N+4)u_{N+1} = Nu_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N}{N^4} \sim \frac{1}{N^3}$ on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} v_N = 0$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{v_0 - v_N}{3} = \frac{v_0}{3}$. On en déduit que S_N converge vers $\frac{v_0}{3}$.

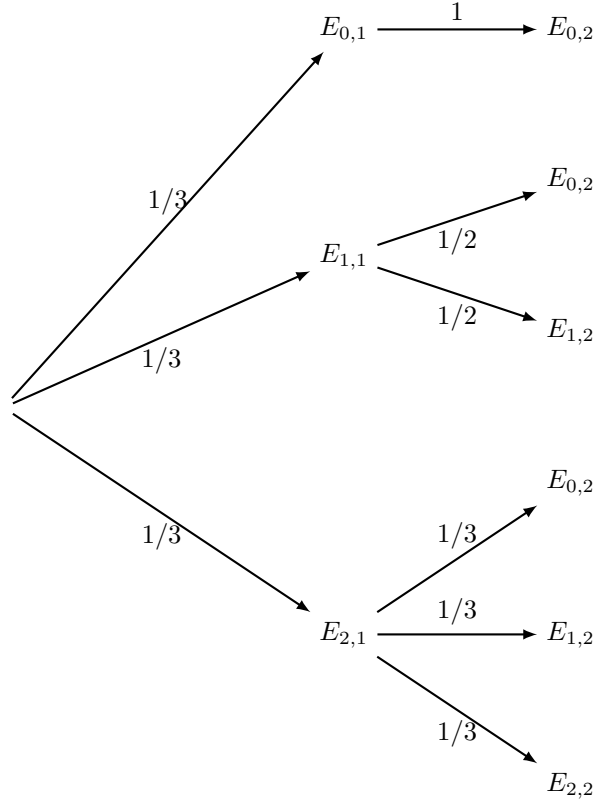
Comme $v_0 = (0+4)u_1 = \frac{4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{6}$ on en déduit finalement :

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{18}}$$

Exercice 4

1. Si on tire la boule 0 au premier tirage ($E_{0,1}$ réalisé), on ne peut tirer que la boule 0 ensuite.

Si on tire la boule 1 au premier tirage ($E_{1,0}$ réalisé), il y a ensuite une chance sur 2 de tirer la boule 0 ou la boule 1.
 Si on tire la boule 2 au premier tirage ($E_{2,0}$ réalisé), il y a une chance sur 3 de tirer chacune des trois boules au deuxième tirage.



on en déduit que

$$P(E_{0,2}) = 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

$$P(E_{1,2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$

et

$$P(E_{2,2}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

2. Pour tout entier naturel non nul n , au n -ème tirage on tire nécessairement l'une des trois boules dans l'urne, donc $E_{0,n} \cup E_{1,n} \cup E_{2,n} = \Omega$.

De plus, on ne peut pas tirer simultanément deux boules différentes donc ces trois événements sont deux à deux incompatibles. $(E_{0,n}, E_{1,n}, E_{2,n})$ forme donc un système complet d'événements.

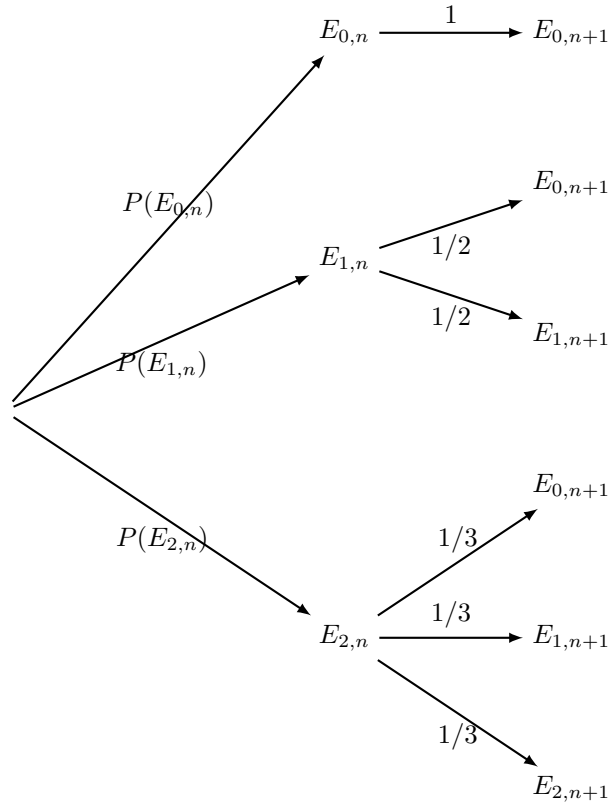
En appliquant la formule des probabilités totales pour calculer $P(E_{0,n+1})$, $P(E_{1,n+1})$ et $P(E_{2,n+1})$ on obtient :

$$P(E_{0,n+1}) = P(E_{0,n}) \times \underbrace{P(E_{0,n+1} | E_{0,n})}_{=1} + P(E_{1,n}) \times \underbrace{P(E_{0,n+1} | E_{1,n})}_{=\frac{1}{2}} + P(E_{2,n}) \times \underbrace{P(E_{0,n+1} | E_{2,n})}_{=1/3} = P(E_{0,n}) + \frac{1}{2}P(E_{1,n})$$

$$\begin{aligned}
P(E_{1,n+1}) &= P(E_{0,n}) \times \underbrace{P(E_{1,n+1} \mid E_{0,n})}_{=0} + P(E_{1,n}) \times \underbrace{P(E_{1,n+1} \mid E_{1,n})}_{=\frac{1}{2}} + P(E_{2,n}) \times \underbrace{P(E_{1,n+1} \mid E_{2,n})}_{=1/3} \\
&= \frac{1}{2}P(E_{1,n}) + \frac{1}{3}P(E_{2,n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(E_{2,n+1}) &= P(E_{0,n}) \times \underbrace{P(E_{2,n+1} \mid E_{0,n})}_{=0} + P(E_{1,n}) \times \underbrace{P(E_{2,n+1} \mid E_{1,n})}_{=0} + P(E_{2,n}) \times \underbrace{P(E_{2,n+1} \mid E_{2,n})}_{=1/3} \\
&= \frac{1}{3}P(E_{2,n})
\end{aligned}$$

On peut faire figurer ces valeurs dans l'arbre suivant :



Or pour tout $n \geq 1$ le produit AU_n donne :

$$\begin{aligned}
AU_n &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_{0,n}) \\ P(E_{1,n}) \\ P(E_{2,n}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P(E_{0,n}) + \frac{1}{2}P(E_{1,n}) + \frac{1}{3}P(E_{2,n}) \\ \frac{1}{2}P(E_{1,n}) + \frac{1}{3}P(E_{2,n}) \\ \frac{1}{3}P(E_{2,n}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{= U_{n+1}}$$

d'après les calculs précédents

Enfin, pour le rang $n = 0$ on a

$$\begin{aligned}
AU_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P(E_{0,1}) \\ P(E_{1,1}) \\ P(E_{2,1}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

puisque l'on a autant de chance de tirer chacune des trois boules au tout premier tirage.

3. Notons, pour tout entier naturel n , $P(n)$ la propriété « $U_n = A^n U_0$ ».

- **Initialisation** : $A^0 = I_3$ donc $A^0 U_0 = U_0$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Alors on a $U_n = A^n U_0$, et comme $U_{n+1} = AU_n$ d'après la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= AU_n \\
&= AA^n U_0 \\
&= A^{n+1} U_0
\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n = A^n U_0$.

4. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} x - y + z = x' \\ y - 2z = y' \\ z = z' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = x' + y - z \\ y = y' + 2z' \\ z = z' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = x' + (y' + 2z') - z' \\ y = y' + 2z' \\ z = z' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = x' + y' + z' \\ y = y' + 2z' \\ z = z' \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc
 $P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5. On calcule $D = P^{-1}AD$:

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc D est bien une matrice diagonale.

6. Notons d'abord que comme $D = P^{-1}AP$ on a $A = PDP^{-1}$.

Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété « $A^n = PD^nP^{-1}$ » et on raisonne par récurrence sur n .

- **Initialisation** : $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, donc $A^0 = PD^0P^{-1}$. Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n , alors

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= AA^n \\
&= PDP^{-1}PD^nP^{-1} && \text{d'après la relation } A = PDP^{-1} \text{ et par hypothèse de récurrence} \\
&= PDI_3D^nP^{-1} \\
&= PD^{n+1}P^{-1}
\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
- Comme D est diagonale on peut exprimer simplement D^n en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$$

donc pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^n} \\ 9 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

7. Comme $U_n = A^n U_0$ et que $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a d'après les calculs précédents :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^n} \\ \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^n} \\ \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(E_{0,n}) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^n} \quad ; \quad P(E_{1,n}) = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^n} \quad ; \quad P(E_{2,n}) = \frac{1}{3^n}}$$

et comme $2 > 1$ et $3 > 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-1} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$, donc par opérations sur les limites on a bien :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_{0,n}) = 1 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_{1,n}) = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_{2,n}) = 0}$$

Exercice 5

Partie I

$$1. \quad F = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

On en déduit que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, et que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F . Cette famille est libre car ces deux matrices sont non colinéaires, donc c'est une base de F .

$\boxed{\text{On en conclut que } \dim(F) = 2}$.

2. La matrice identité est dans G car $I_3^2 = I_3$. En revanche, $(2I_3)^2 = 4I_3 \neq 2I_3$, donc $2I_3 \notin G$.

G n'est pas stable par produit réel donc $\boxed{G \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$$3. \quad (a) \quad A = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } A \in F. \text{ De plus, on vérifie par le calcul que } A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A \text{ donc } A \in G.$$

On a donc bien $\boxed{A \in F \cap G}$.

(b) Supposons que A est inversible, et notons A^{-1} son inverse. Comme $A^2 = A$ on a $A^{-1}A^2 = A^{-1}A = I_3$ donc $A = I_3$. Or $A \neq I_3$, contradiction, donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$.

$$4. \quad (a) \quad \text{On a } M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 2b^2 & 2ab + b^2 & 2ab + b^2 \\ 2ab + b^2 & a^2 + 2b^2 & 2ab + b^2 \\ 2ab + b^2 & 2ab + b^2 & a^2 + 2b^2 \end{pmatrix} \text{ donc } M^2 = M \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ 2ab + b^2 = b \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases},$$

c'est à dire :

$$\boxed{M \in G \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}}$$

(b) D'après le système précédent, si $M \in G$ on a $b(b + 2a - 1) = 0$ donc $b = 0$ ou $b + 2a - 1 = 0$.

- Si $b = 0$, l'équation $a^2 + 2b^2 = a$ devient $a^2 = a$ qui admet pour seules solutions $a = 1$ et $a = 0$, donc $M = 0_3$ ou $M = I_3$.
- Si $b \neq 0$, alors $b + 2a - 1 = 0$ donc $b = 1 - 2a$. En substituant dans $a^2 + 2b^2 = a$ on obtient $a^2 + 2(1 - 2a)^2 = a$.

$$\begin{aligned}
a^2 + 2(1 - 2a)^2 = a &\iff a^2 + 2 + 8a^2 - 8a = a \\
&\iff 9a^2 - 9a + 2 = 0 \\
&\iff a = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad a = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

donc les seules solutions sont $(a, b) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $(a, b) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ ce qui donne :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3 - A \quad \text{ou} \quad M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

On a donc bien $M \in F \cap G \iff M \in \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$ donc

$$\boxed{F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}}$$

5. $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc A et B sont non colinéaires (si elles l'étaient il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$

tel que $A = \lambda B$ ou $B = \lambda A$ ce qui conduirait dans un cas à $\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\lambda \\ -\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\lambda \end{cases}$ et dans l'autre cas à $\begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\lambda \end{cases}$ et aucun de ces systèmes n'a de solution).

(A, B) est une famille libre à deux éléments de F , et on sait d'après la question 1) que $\dim(F) = 2$,

donc $\boxed{(A, B) \text{ est une base de } F}$

6. (a) On vérifie :

$$\begin{aligned}
(a - b)A + (a + 2b)B &= \frac{a - b}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{a + 2b}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a - 2b + a + 2b & -a + b + a + 2b & -a + b + a + 2b \\ -a + b + a + 2b & 2a - 2b + a + 2b & -a + b + a + 2b \\ -a + b + a + 2b & -a + b + a + 2b & 2a - 2b + a + 2b \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3b \\ 3b & 3a & 3b \\ 3b & 3b & 3a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\
&= \boxed{M}
\end{aligned}$$

(b) On a sans trop de calculs $\boxed{AB = A(I_3 - A) = A - A^2 = A - A = 0_3 \text{ car } A \in G.}$

De même, $\boxed{BA = (I_3 - A)A = A - A^2 = A - A = 0_3.}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété $M^n = \alpha A^n + \beta B^n$ et on raisonne par récurrence.

- **Initialisation :** $M^0 = I_3$ et $\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = I_3$ par définition de B .
- **Hérédité :** Supposons que $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ pour un certain entier naturel n . Alors

$$M^{n+1} = M \times M^n$$

$$= (\alpha A + \beta B)(\alpha^n A + \beta^n B)$$

par hypothèse de récurrence

$$= \alpha^{n+1} A^2 + \alpha \beta^n AB + \beta \alpha^n BA + \beta^{n+1} B^2$$

$$= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B$$

car $AB = BA = 0$ et $A^2 = A$ et $B^2 = B$

- **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \alpha^n A + \beta^n B}$$

On peut aussi faire cette question par un calcul direct mais c'est un peu plus long : A et B commutent donc αA et βB commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton. Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$M^n = (\alpha A + \beta B)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha A)^k (\beta B)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} A^k B^{n-k}$$

Or lorsque $k \geq 1$ et $n - k \geq 1$ on peut écrire $A^k B^{n-k} = A^{k-1} \underbrace{AB}_{=0} B^{n-k-1} = 0$. Les seuls termes non nuls de la somme sont lorsque $k = 0$ et lorsque $n - k = 0$ c'est à dire $k = n$, d'où :

$$\begin{aligned} M^n &= \alpha^0 \beta^n A^0 B^n + \alpha^n \beta^0 A^n B^0 \\ &= \alpha^n A^n + \beta^n B^n \end{aligned}$$

Comme A et B sont dans G , on a $A^2 = A$ et $B^2 = B$. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = A$ et $B^n = B$.

- **Initialisation :** C'est vrai pour $n = 1$ car $A = A$ et $B = B$.
- **Hérédité :** Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$ on a $A^n = A$ et $B^n = B$. Alors $A^{n+1} = AA^n = A^2 = A$ et $B^{n+1} = BB^n = B^2 = B$.
- **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout entier $n \geq 1$ on a $A^n = A$ et $B^n = B$

Finalement, on a bien pour $n \geq 1$:

$$M^n = \alpha^n A + \beta^n B$$

Il reste à vérifier le cas $n = 0$. On a d'une part :

$$\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = I_3$$

et d'autre part

$$M^0 = I_3$$

donc on a bien $M^0 = \alpha^0 A + \beta^0 B$.

Finalement on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \alpha^n A + \beta^n B}$$

(d) Si $\alpha = 0$ alors $a = b$ donc $M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$ qui est clairement non inversible (ses trois lignes sont égales, elle est donc de rang 1).

Si $\beta = 0$, alors $a = -2b$ donc $M = \begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix} = -3bA$. Or on sait que A est non inversible donc M est non inversible.

On a montré que :

$$(\alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0) \implies M \text{ est non inversible}$$

donc par contraposée :

$$M \text{ est inversible} \implies (\alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0)$$

Réciproquement, si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, montrons que la matrice $\left(\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B\right)$ est l'inverse de M :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B\right)M &= \left(\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B\right)(\alpha A + \beta B) \\ &= A + \frac{\beta}{\alpha}AB + \frac{\alpha}{\beta}BA + B \\ &= A + B && \text{car } AB = BA = 0 \\ &= I_3 \end{aligned}$$

donc M est bien inversible et son inverse est $\left(\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B\right)$.

Note : ce résultat semble parachuté, on l'a deviné grâce à la question suivante, ce n'est pas de la triche puisqu'on redémontre bien que c'est l'inverse de M et cela montre qu'il faut bien lire toutes les questions avant de les faire !

(e) Pour tout entier naturel n , calculons $(\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B)(\alpha^n A + \beta^n B)$:

$$\begin{aligned} (\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B)(\alpha^n A + \beta^n B) &= A + \alpha^{-n}\beta^n AB + \alpha^n \beta^{-n} BA + B \\ &= A + B && \text{car } AB = BA = 0 \\ &= I_3 \end{aligned}$$

donc $(\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B)$ est bien l'inverse de M^n , pour tout entier naturel n .